Universidade de Aveiro Departamento de Educação
2005

VÂNIA CATARINA RENCA DA CRUZ

O CONCEITO DE DERIVADA

Dedico este trabalho aos meus pais, irmãos, sobrinho e namorado.

o júri

presidente

Prof. Dr. Isabel Maria Cabrita Dos Reis Pires Pereira
professora auxiliar do Departamento de Educação da Universidade de Aveiro

Prof. Dr. Rosa Antónia Tomas Ferreira
professora auxiliar da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

Prof. Dr. Rosa Amélia Baptista Ferreira Soares Martins
professora auxiliar do Departamento de Matemática da Universidade de Aveiro

agradecimentos

Quero agradecer aos meus pais por todas as oportunidades que me têm dado e por me terem apoiado nesta minha vontade até ao fim.
Agradeço aos meus irmãos, por serem companheiros, amigos e terem sempre uma palavra de incentivo pronta a ser dada.
Agradeço à Orientadora, Dr. Rosa Amélia, por todo o acompanhamento dado ao longo do ano, pela disponibilidade, pelo carinho e pela compreensão face às situações adversas que enfrentei.
Agradeço ao Orientador, professor Rui Lebre, por nos ter dado o primeiro contacto com o ensino e com o mundo do trabalho de uma forma tão realista e prática, agradeço também por todo o apoio e compreensão ao longo de todo o ano.
Não podia deixar de agradecer à Juliana por me ter mostrado o verdadeiro valor da amizade, por estar sempre comigo em todos os momentos e por termos conseguido conciliar a amizade e o trabalho.
Por fim quero agradecer ao meu namorado, por toda a paciência que teve comigo e por todo o apoio que me deu.

palavras-chave

Conceito de derivada, entrevista, abordagem de ensino, unidade de ensino

resumo

O conceito de derivada é um dos tópicos mais aliciantes entre aqueles que são leccionados em Matemática A do 11º ano. Como tal, esta investigação debruçou-se nesta temática, através da experiência de docentes com largos anos de tempo de serviço. Foram feitas entrevistas a um grupo de professores que depois de analisadas, serviram para tentar identificar o tipo de abordagem que esses mesmos professores adoptam ao leccionar este conceito (e os outros conceitos no geral) e também foram base para a construção de uma unidade de ensino, de três a quatro aulas, onde se tenta encontrar uma forma atractiva e o mais interactiva possível de se leccionar este conceito.

keywords

Concept of derivative, interview, teaching approach, teaching unit

abstract

The concept of derivative is one of the most attractive among those taught in the subject of Mathematics during the 11th grade. This way, this research focused on this theme, through the experience of teaches with a large number of years of service. Interviews were made to a group of teachers that, after being analysed, were useful in trying to identify the type of approach adopted by those teachers when lecturing this concept (and other concepts in general) and were also the basis for the construction of a teaching unit, encompassing three to four classes, where the purpose is to find an attractive and as interactive as possible to lecture this concept.

ÍNDICE

ÍNDICE DE TABELAS

ÍNDICE DE ESQUEMAS

CAPÍTULO I

ORGANIZAÇÃO DO RELATÓRIO

O presente trabalho está organizado em seis capítulos. No primeiro, é feita uma introdução e são dados a conhecer os objectivos do relatório.

No segundo capítulo, é feita uma pequena abordagem teórica, onde são tratados alguns pontos de interesse para o restante trabalho, fundamentalmente no que diz respeito às concepções dos professores relativamente à disciplina de Matemática.

No terceiro capítulo, é feita uma nota histórica da evolução do conceito de derivada ao longo dos tempos, incluindo a actualidade, assim como são vistas as indicações do actual programa relativamente a este tópico. É feito também um pequeno paralelo com a área da Física e da Economia, por serem aquelas em que se desenvolve também este conceito no Ensino Secundário, sem ser só o seu cariz matemático.

No quarto capítulo, é apresentado e analisado o Trabalho de Campo e após esse processo são retiradas algumas conclusões.

No quinto e penúltimo capítulo, é construída uma Sequência Didáctica acerca do conceito de derivada, com base no Trabalho de Campo.

Por fim, é feita uma conclusão geral do trabalho.

INTRODUÇÃO

O conceito de derivada é um dos mais delicados a ser transmitido durante o 11º Ano. Este tema tem especial importância, pois além do bloco das funções ser tratado ao longo de todo o ensino secundário, tendo sempre especial ênfase, é com o conceito de derivada que os alunos têm o primeiro contacto com a noção de limite de uma função (quando aplicado à taxa média de variação).

Outro aspecto que merece especial destaque, prende-se com a sua historicidade. Fermat ao introduzir coordenadas em gráficos de funções, quando estudava problemas geométricos, conseguiu torná-los problemas algébricos, estudando assim as funções analiticamente. Apesar de ter sido Leibniz a dar a notação adequada ao Cálculo Diferencial, Fermat foi sem dúvida um grande impulsionador. Este facto é verdadeiramente importante na História da Matemática.

A nível de historicidade em contexto escolar, foi um tema que já sofreu bastantes alterações, por exemplo, no que diz respeito ao contexto em que era introduzido, a nível do ano de escolaridade em que era introduzido (isto fazendo um paralelo entre o antigo 5º e 6º anos de escolaridade e o Ensino Secundário actual). Há todo o interesse em ter uma visão alargada sobre este aspecto também.

O Trabalho de Campo que se vai apresentar no presente trabalho, surgiu através de uma curiosidade despertada quando frequentei a disciplina de Didáctica e Desenvolvimento Curricular da Matemática B. Nessa altura, sem qualquer tipo de experiência ou contacto com outros professores de matemática, tivemos que desenvolver uma simulação acerca do conceito de derivada. Tendo surgido uma oportunidade como esta, decidi no presente trabalho entrevistar um grupo de professores, para que pudessem partilhar comigo a sua experiência com o objectivo de desenvolver uma nova simulação, que designo por Sequência Didáctica, que pode ser utilizada quando se quer leccionar o conceito de derivada (pela primeira vez) no 11º ano de escolaridade em Matemática A.

OBJECTIVOS DO RELATÓRIO

De entre vários objectivos que se podem destacar neste trabalho, realçam-se dois:

1) conhecer diferentes abordagens do conceito de derivada;
2) construir uma unidade de ensino a partir das abordagens estudadas.

Assim sendo, como consequência irei aprofundar o estudo do conceito de derivada, procurando realçar a importância deste conceito em contexto do ensino secundário.

CAPÍTULO II

ENQUADRAMENTO TEÓRICO

Uma das principais preocupações, no que diz respeito ao ensino de um modo geral, tem sido a qualidade com que se desenvolve o processo ensino-aprendizagem. O modo como os professores encaram o seu ensino constitui um forte factor na predilecção dos alunos por determinada abordagem de aprendizagem.

O conceito de abordagem de aprendizagem descreve a relação estabelecida entre o aluno e uma tarefa de aprendizagem específica na qual este está envolvido (Prosser & Trigwell, 2000). Os estudos realizados neste sentido apontam para dois tipos de abordagem: uma abordagem superficial (surface approache) e uma abordagem profunda (deep approache). Na abordagem superficial, os alunos preocupam-se apenas em memorizar os conceitos sem haver uma preocupação para compreender e relacionar os mesmos, enquanto que na abordagem profunda os alunos relacionam os conceitos que vão adquirindo com aqueles que já possuem e com a sua vivência pessoal, construindo assim o seu próprio conhecimento.

Acerca das concepções do ensino-aprendizagem da Matemática em particular, Thompson (1992) considera que há uma série de aspectos que se devem considerar no estudo das concepções dos professores:

- objectivos no ensino desta disciplina;
- as abordagens pedagógicas;
- o papel do professor;
- o controlo na sala de aula;
- percepção do propósito das planificações;
- a noção do que são procedimentos matemáticos legítimos;
- a perspectiva do que é o conhecimento matemático dos alunos;
- o que são resultados aceitáveis no ensino e o respectivo modo de avaliação.

Esta autora ainda propõe quatro orientações no que diz respeito às concepções pedagógicas:

- centradas no conteúdo com ênfase na compreensão conceptual;
- centradas no conteúdo com ênfase na execução;
- centradas no aluno;
- centradas na organização da sala de aula.

Contudo, estas concepções podem variar de acordo com factores como o meio social, cultural, económico que envolve a comunidade escolar, o ano de escolaridade em causa, a idade dos alunos, entre outros que possam influenciar este processo.

Ainda acerca do processo de ensino-aprendizagem, Guimarães (1998) destacou seis ideias:

- alternam-se momentos de exposição, mais a cargo do professor, com momentos de prática, mais a cargo do aluno;
- durante a exposição é responsabilidade do professor transmitir a informação e é responsabilidade do aluno recolhê-la;
- o processo é um diálogo de pergunta-resposta, sendo umas vezes mais conceptual, outras mais mecânico;
- grande parte das aulas é preenchida com aspectos práticos que passam pela resolução de exercícios de aplicação;
- as situações de ensino-aprendizagem são muito estruturadas por norma e não tendem para um carácter mais problemático;
- privilegia-se a interacção professor-aluno.

Relativamente à construção do conhecimento em si, mais propriamente dos conceitos matemáticos, Vygotsky define conceito espontâneo e conceito científico. O conceito espontâneo é aquele que o aluno desenvolve a partir das suas próprias experiências e posteriores reflexões; conceito científico é aquele que é orientado pelo professor. Através de actividades estruturadas onde o professor fornece informação e questiona o aluno, obrigando o aluno a raciocinar acerca de determinado conceito, o aluno abstrai-se mais formalmente e os conceitos tornam-se definidos usando a lógica.

No que diz respeito ao tema deste trabalho, o conceito de derivada poder ser desenvolvido de uma forma mais intuitiva ou de uma forma mais formal. Posteriormente, no Estudo de Caso, irão ser analisadas estas duas situações.

CAPÍTULO III

CONCEITO DE DERIVADA AO LONGO DOS TEMPOS

NOTA HISTÓRICA

A origem do **conceito de derivada** está presente desde a época em que se tratavam os problemas geométricos de tangencia, como por exemplo, quando se quer determinar a recta que é tangente a uma dada curva num dado ponto.

No que diz respeito a problemas geométricos, desde a antiguidade que há referências acerca de estudos que conduziram a este conceito. Euclides (300 a.C.) provou o teorema que diz que "toda a recta tangente a um círculo num ponto P é perpendicular ao raio desse círculo em P". Também nesse sentido, passados alguns anos, Arquimedes criou um procedimento para encontrar a **tangente à sua espiral** e na mesma altura, Apolónio descreveu métodos para determinar **tangentes a parábolas, elipses e hipérboles**.

Outro tipo de problemas que surgiram na antiguidade e que se relacionam com este conceito, prendem-se com as questões de movimento e de **velocidade**. Na mesma altura, nos seus estudos físicos, Aristóteles chegou à conclusão de que os problemas de movimento estão associados intimamente a noções de continuidade e do infinito.

Foi só no século XVI com Galileu Galilei que foi estabelecida a ideia de que a matemática é a ferramenta indispensável para estudar o movimento. Galileu estudou o movimento geometricamente usando as proporções clássicas de Euclides e as propriedades das cónicas de Apolónio para estabelecer relações entre distância, **velocidade e aceleração**.

Com o desenvolvimento da Geometria Analítica no século XVII, reapareceu o estudo das **tangentes a curvas**. A partir do momento em que foram usadas equações para descrever curvas, o seu número e a sua variedade aumentaram.

No século XVII, Pierre Fermat introduziu símbolos algébricos para estudar a geometria de curvas o que contribuiu significativamente para o desenvolvimento do **conceito de derivada** e do cálculo em geral. Fermat desenvolveu um procedimento algébrico para determinar os **máximos e os mínimos de uma curva**. Geometricamente, Fermat estava a determinar em que pontos a **tangente à curva tem inclinação zero**.

No final do século XVII, Isaac Newton desenvolveu o "cálculo de fluxions" onde considerou que o movimento é a base fundamental para curvas, tangentes e fenómenos relacionados de cálculo. Newton usou esta técnica também para encontrar a ***curvatura* de uma curva**, que actualmente se encontra através da **segunda derivada da função que descreve a curva**.

Também no século XVII, Leibniz desenvolveu o seu cálculo diferencial e integral aperfeiçoando as fórmulas modernas e a **notação para derivada**. Newton e Leibniz tiveram um forte papel no desenvolvimento do cálculo, contribuindo nos estudos da **derivada**, do integral, das séries infinitas e para o conhecido Teorema Fundamental do Cálculo.

Colin Maclaurin já no século XVIII, desenvolveu **derivadas para funções logarítmicas e exponenciais e expandiu as fórmulas de Simpson para incluir as derivadas das funções tangente e secante**.

Também Euler no século XVIII, definiu a derivada como "***o método para determinar as razões entre os incrementos imperceptíveis, as quais as funções recebem, e os incrementos imperceptíveis das quantidades variáveis, das quais elas são funções***". Euler trabalhou com vários casos especiais da **regra da cadeia para a derivada de funções compostas**, introduziu equações diferenciais e estudou os **máximos e mínimos analiticamente**. Na mesma época, Jean le Rond d'Alembert disse que a "definição mais precisa e elegante possível do cálculo diferencial" é que a derivada é o **limite de certas razões quando os numeradores e denominadores se aproximam mais e mais de zero**, e que este limite produz certas expressões algébricas a que chamamos de **derivada**.

No final do século, Joseph Louis Lagrange tentou reformar o cálculo tornando-o mais rigoroso, com o objectivo de, entre outros, explicar o conceito de derivada apenas algebricamente, sem recorrer à intuição geométrica. Lagrange desenvolveu a principal notação que se usa hoje em dia para as derivadas e foi um grande impulsionador no desenvolvimento do cálculo. No entanto, teve algumas falhas. A sua teoria acerca das derivadas baseou-se em propriedades de séries infinitas, as quais não são verdadeiras.

No início do século XIX, a definição moderna de derivada foi dada por Augustin Louis Cauchy afirmando que a derivada é:

O limite de $\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$ quando i se aproxima de 0. A forma da função que serve como o limite da razão $\frac{f(x+i)-f(x)}{i}$ dependerá da forma da função proposta $y = f(x)$. Para indicar a sua dependência, dá-se à nova função o nome de *função derivada*.

Além de Cauchy ter encontrado a derivada de várias funções básicas, descobriu a Regra da cadeia e mostrou que o Teorema do Valor Médio para derivadas, (descoberto por Lagrange), era fundamental para provar vários teoremas do cálculo que até então tinham sido assumidos como verdadeiros. Desde esta altura que as derivadas e o cálculo diferencial são uma parte rigorosa do cálculo.

ALTERAÇÕES NO CURRÍCULO DO ENSINO SECUNDÁRIO

Um dos aspectos importantes a ser retratado neste trabalho, é a evolução do conceito de derivada no currículo do Ensino Secundário ao longo dos tempos. Mais à frente, no capítulo do Caso de Estudo, são feitas várias referências pelos professores entrevistados, desta mesma situação.

Esta evolução vai ser dividida em quatro fases distintas:

- 1ª Fase: Introdução do conceito de derivada (1905-1963);
- 2ª Fase: Introdução da Matemática Moderna (1963-1974);
- 3ª Fase: A Lei de Bases do Sistema Educativo (1974-86);
- 4ª Fase: Da Lei de Bases ao final do século XX.

Na primeira fase, o Ensino Liceal dividia-se em dois tipos de cursos: o Curso Geral e o Curso Complementar. O Curso Geral tinha uma duração de cinco anos divididos em dois ciclos e o Complementar de dois anos, dividindo-se este último em duas áreas: Ciências e Letras.
A primeira vez que é introduzido o conceito de derivada, é nos programas aprovados em 3 de Novembro de 1905, no Curso Complementar de Ciências, no capítulo da Álgebra:
Álgebra:
Equação do 2º grau a uma incógnita: resolução e discussão. Composição da equação. Propriedades do trinómio do 2ºgrau. Resolução das desigualdades do 2ºgrau. Discussão de problemas do 2ºgrau. Equações biquadradas. Equações irracionais que se reduzem a equações do 1º e 2ºgrau. Sistema de duas equações a duas incógnitas, uma do 1ºgrau e outra do 2º.
Função exponencial. Nova definição dos logaritmos. ***Noção de derivada; sua interpretação geométrica. Derivada de uma soma, de um produto de um quociente, de uma potência, de uma raiz. Derivadas das funções circulares.*** *Revisões.*

Em 1918, é feita uma nova reforma ao currículo onde entre outras alterações, aparece um novo capítulo no Curso Complementar de Ciências, denominado por "Elementos de Cálculo Infinitesimal". Esta reforma foi muito importante, uma vez que o conceito de derivada aparecia de uma forma um pouco isolada no meio dos restantes conteúdos dedicados mais à Álgebra das Funções. Neste novo capítulo também foi introduzido o conceito de integral. O Cálculo Infinitesimal ganha mais autonomia em relação a áreas como a Álgebra, Aritmética e Geometria.

Elementos de Cálculo Infinitesimal:
Teoria dos limites. Teoremas sobre os limites da soma, produto e quociente. ***Derivada: importância desta noção. Derivada duma soma, dum produto, dum quociente, duma potência, duma raiz, duma função de função.*** *Noção de integral (basta mostrar a existência em casos particulares). Aplicações.*

Um dos aspectos a realçar nesta reforma, é o facto da Teoria dos limites ser dada antes da noção de derivada e de integral.
Posteriormente, seguiram-se alterações ligeiras neste capítulo e surgiu pela primeira vez, em 1926, este conceito na quarta classe do Curso Geral.

a) Continuação do estudo da álgebra:
Sistemas de equações do 1ºgrau; sua resolução. Noção de número irracional. Radicais, suas operações. Generalização da noção de potência: expoentes negativos e fraccionários, expoente nulo. Equação do 2º grau a uma incógnita. Resolução, em casos simples, de problemas do 2º grau a uma incógnita. Equação biquadrada. Sistemas de duas equações a duas incógnitas, uma do 2º grau e outra do 1º. Noção de limite, apresentada por meio de exemplos da aritmética, da álgebra e da geometria. ***Noção de derivada.***

Em 1930 são introduzidos novos programas no Ensino Liceal. O conceito de derivada aparece enquadrado com o estudo das funções, dos limites de funções de uma só variável e da continuidade de funções. É também introduzido o conceito de diferencial de uma função.

a)Álgebra:
Funções; classificação das funções; propriedades elementares das funções inteiras; princípio das identidades; método dos coeficientes indeterminados; aplicações. Funções fraccionárias; símbolos de impossibilidade e indeterminação.
Limites de funções de uma só variável; teoremas relativos à soma, ao produto e ao quociente destes limites; exercícios sobre a determinação dos limites de funções. Função contínua num ponto; função contínua num intervalo; exemplos de funções contínuas e representação gráfica destas funções. Função crescente num ponto e num intervalo; Função decrescente num ponto e num intervalo.
Derivada e diferencial de uma função num ponto; interpretação geométrica da derivada; derivada da soma, do produto, do quociente, da potência, da raiz, da função de função e da função inversa.

Análise combinatória; arranjos, permutações e combinações. Binómio de Newton; aplicações. Resolução e discussão da equação geral do 1ºgrau a uma incógnita: Análise indeterminada do 1ºgrau.

É em Setembro de 1947 que se dá a última reforma do Ensino Liceal. Em relação aos conteúdos programáticos, foi reintroduzida a Análise Infinitesimal no 6º ano, sendo dado o conceito de derivada no 7º ano (no Curso Complementar de Ciências).

Álgebra:
Análise combinatória - elementos distintos e sem repetição. Binómio de Newton.
Números complexos a duas unidades; forma algébrica: igualdade, desigualdade e operações.
Equação do 2º grau a uma incógnita; resolução algébrica e gráfica; discussão.
Equação biquadrada; resolução algébrica; discussão. Transformação de um radical duplo na soma algébrica de dois radicais simples.
Equações irracionais redutíveis ao 2º grau.
Trinómio do 2º grau; representação gráfica; propriedades. Inequações: noções gerais e princípios de equivalência. Inequações do 2º grau a uma incógnita; inequações fraccionárias que se resolvem por meio de inequações do 1º grau ou 2º grau a uma incógnita.
Problemas do 1º e 2º grau.
O problema das tangentes e o das velocidades; noção de derivada de uma função num ponto; função derivada. Derivadas das funções algébricas e das funções circulares directas; derivada da função de função.

Estes programas mantiveram-se durante vários anos.

Na segunda fase, dá-se a introdução da Matemática Moderna no Ensino Secundário em Portugal, no ano de 1963, sendo o seu grande impulsionador José Sebastião e Silva. Com o objectivo de aproximar mais o nível do que era leccionado no Secundário com o que era leccionado no Ensino Superior, José Sebastião e Silva escreveu dois Guias Didácticos com algumas orientações metodológicas, onde abordou temas como Lógica, Teoria dos conjuntos, Estruturas algébricas, Números Complexos, Probabilidades, Estatística, Cálculo integral e Cálculo Numérico Aproximado.
O conceito de derivada aparece no 7º ano, no tema "Introdução ao Cálculo Diferencial".

Capítulo I: Introdução ao Cálculo Diferencial

1. Cálculo Numérico Aproximado

2. Teoria dos limites de Sucessões

3. Limites de Funções de variável real

4. Derivadas:

Conceitos fundamentais e regras de derivação. Conceito de diferencial; regras de diferenciação. O conceito de diferencial nas ciências da natureza. Derivadas das funções exponencial e logaritmíca. Derivada da função logarítmica. Derivadas das funções circulares. Máximos e mínimos: concavidades e inflexões. *Teorema de Cauchy. Método da tangente (ou de Newton). Método da corda (ou regra da falsa posição). Interpolação por diferenças finitas.*

Na terceira fase, com a reforma de Veiga Simão, foram tomadas medidas no que diz respeito ao Sistema Escolar e ao Ensino Superior. Em 1974, é publicado o novo programa do Ensino Liceal, com dois programas distintos: um relativo à Matemática Moderna a ser aplicado ao 2º ano do Curso Complementar de Ciências (antigo 7º ano) e o outro relativo à Matemática Clássica a ser leccionado no 1º ano do Curso Complementar de Ciências (antigo 6º ano).

Introdução à Análise Infinitesimal

1.1 Cálculo numérico aproximado

1.2 Limite de sucessões

1.3 Limites de funções de variável real

1.4 Funções contínuas

1.5 Derivadas e primitiva:

Derivada de uma função num ponto; significado geométrico. Derivabilidade e continuidade. Função derivada. Interpretação cinemática do conceito de derivada. Regras de derivação. Derivada da função inversa e derivada da função composta. Aplicações das derivadas: sentido da variação de uma função, concavidades, gráficos e problemas concretos. *O problema da primitivação. Primitivação imediata e primitivação por decomposição. Aplicações simples do cálculo de primitivas.*

2.7 As funções de variável natural. Limites de sucessões.

Limites de funções de variável real: continuidade.

Derivadas: definição de derivada de uma função num ponto e sua interpretação geométrica.

Derivabilidade e continuidade (com demonstração).
A função derivada. Regras de derivação, incluindo a derivada da raiz. Dedução nos casos da soma, produto, potência e derivada da função inversa.
Aplicação a problemas de máximos e mínimos e representação gráfica de funções.

No quarto período, com a publicação da Lei de Bases do Sistema Educativo a 14 de Outubro de 1986, houve uma reestruturação em todo o Sistema Educativo. Além de ter aumentado a Escolaridade obrigatória e de ter sido integrado o 12º ano de escolaridade, foi publicado em 1991 o Novo Programa de Matemática para o Ensino Secundário (do 10º ao 12º ano).
Nesta nova organização, o programa foi elaborado com vista a ser feita uma abordagem progressiva das matérias, havendo temas transversais ao longo dos três anos. O conceito de derivada era retratado apenas no 11º e 12º ano.

11º ano
7. Funções-III- Limites. Derivadas.
- Limites e continuidade de funções.
- Derivação de funções racionais. Segunda derivada.
- Aplicações.

12º ano
2. Funções-V- Complementos sobre Derivadas.
- Derivada da função inversa e da função composta; aplicações. Derivadas sucessivas. Derivadas de funções implícitas.
- Estudo de funções irracionais.
6. Funções-VI- Funções Trigonométricas em IR.
- Fórmulas. Equações e identidade.
- Seno, co-seno e tangente como funções de variável real.
- Limites, continuidade, derivada, variação.
- Primitivas imediatas: cálculo de áreas.

Desde 1991 até 1997, várias críticas foram apontadas a estes programas, o que levou a uma nova reformulação, havendo uns pequenos ajustes no programa anterior:

11º ano

2- Introdução ao Cálculo Diferencial I- *Funções Racionais e com Radicais. Taxa de variação/derivada*:

- Estudo de propriedades das Funções racionais do tipo $f(x) = a + \frac{b}{cx+d}$*; referência à hipérbole.*

- Aproximação experimental da noção de limite.

- Operações com funções: soma, diferença, produto, quociente, composição.

- Noção da taxa média de variação; noção da taxa de variação; interpretação geométrica e física.

- Determinação da derivada em casos simples; aplicações.

- Inversão de funções; funções com radicais quadráticos e cúbicos.

12º ano

2- Introdução ao Cálculo Diferencial II:

- Função exponencial e função logarítmica de bases maiores que 1. Regras operatórias de exponenciais e logaritmos. Aplicações concretas.

- Limite de função segundo Heine; propriedades operatórias sobre limites; limites notáveis. Indeterminações. Assímptotas.

- Continuidade. Teorema de Bolzano-Cauchy e aplicações numéricas.

- Funções deriváveis. Regras de derivação e derivadas de funções elementares.

Segunda definição do número e. Segundas derivadas e concavidade.

- Estudo de funções em casos simples.

- Problemas de optimização.

3. Trigonometria e Números Complexos:

- Funções seno, co-seno e tangente; estudo de propriedades; cálculo de derivadas.

- Introdução histórica dos números complexos, através dos problemas da resolubilidade algébrica.

- Complexos na forma algébrica e na forma trigonométrica.

- Operações.

- Domínios planos e condições em variável complexa.

Este programa está em vigor até aos dias de hoje. Posteriormente, irá ser analisado com mais pormenor.

INDICAÇÕES DO PROGRAMA NA LECCIONAÇÃO DESTE CONTEÚDO

Relativamente ao enquadramento deste tópico no programa do 11º ano de Matemática A, é dado no Tema das funções, que é iniciado no 10º ano. Os conceitos são aprofundados e são estudados novos casos, como por exemplo, funções com radicais. O programa sugere que conceito de derivada seja dado através do conceito de taxa média de variação.

"As noções de taxa média de variação e de taxa de variação/derivada desempenham um papel central neste Tema, sendo introduzidas recorrendo a um uso informal da noção de limite."

É também incentivada a interdisciplinaridade da Matemática em relação a disciplinas como a Economia e Física e Química.

"A utilização de exemplos concretos dessas disciplinas, a realização de actividades comuns ou a leccionação de algum aspecto numa dessas disciplinas para posterior aprofundamento na disciplina de Matemática são algumas das possibilidades que se oferecem aos professores."

Os itens a serem leccionados, segundo o programa, são:

- ✓ Resolução de problemas envolvendo funções ou taxa de variação.
- ✓ Conceito intuitivo de limite, de $+\infty$ e de $-\infty$.
- ✓ Noção de taxa média de variação; cálculo da taxa média de variação.
  Noção de taxa de variação; obtenção da taxa de variação (valor para que tende a t.m.v. quando a amplitude do intervalo tende para zero) em casos simples.
- ✓ Interpretação geométrica da taxa de variação; definição de derivada (recorrendo `a noção intuitiva de limite).
- ✓ Determinação da derivada em casos simples: função afim, funções polinomiais do 2º e 3º grau, função racional do 1º grau, função módulo.
- ✓ Constatação, por argumentos geométricos, de que:
  i. se a derivada é positiva num intervalo aberto a função é crescente nesse intervalo e, se a derivada é negativa num intervalo aberto a função é decrescente nesse intervalo;
  ii. se a função é derivável num intervalo aberto e se tem um extremo relativo num ponto desse intervalo então a derivada é nula nesse ponto.

No capítulo VI deste trabalho, após serem analisadas as entrevistas no capítulo anterior, vai ser construída uma Unidade de Ensino segundo o programa em vigor e segundo as sugestões dos professores entrevistados.

APLICAÇÕES DA DERIVADA EM OUTRAS ÁREAS

Como foi referido nas indicações do programa de Matemática A do 11º ano de escolaridade, há todo o interesse em usar situações concretas, por exemplo, de outras disciplinas, com o objectivo de promover a compreensão deste conceito por parte dos alunos. As duas áreas indicadas foram a Economia e a Física e Química. Pretende-se com este capítulo, entender as aplicações que a derivada pode ter nestas duas áreas em particular.

A nível da Física e Química é no Tema da Mecânica, quando se estudam os movimentos, que este conceito tem aplicação. A partir das grandezas que descrevem o movimento (espaço percorrido (s) e tempo (t)), aprendem a calcular a velocidade (v):

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Onde Δs representa a variação do espaço e Δt a variação do tempo.

A partir da função que descreve o movimento (espaço percorrido em função do tempo), esta mesma grandeza pode ser calculada através da derivada desta última função ($s(t)$). Assim sendo, tem-se:

$$v(t) = \frac{\partial s(t)}{\partial t}$$

Pela mesma ordem de ideias, a aceleração pode ser calculada através da derivada da função que define a velocidade $v(t)$, ou seja, a derivada de segunda ordem da função do espaço percorrido durante um determinado intervalo de tempo $s(t)$:

$$a(t) = \frac{\partial v(t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 s(t)}{\partial^2 t}$$

A riqueza de todo este processo está no relacionamento dos conceitos das diferentes áreas. Por exemplo, quando é dada a noção de velocidade instantânea, são relacionados dois conceitos matemáticos: limite e derivada. A velocidade instantânea (v_i) não é nada mais do que o limite quando a variação do tempo tende para zero, da razão entre a variação do espaço percorrido e a correspondente variação do tempo:

$$v_i = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

Graficamente, calculou-se a inclinação da recta tangente ao gráfico de $s(t)$ no instante t pretendido.

A exploração dos conceitos matemáticos subjacentes a estes conceitos físicos, pode ser muito proveitosa para os alunos a ponto de lhes facilitar a compreensão daquilo que se pretende.

Outra das disciplinas em que o conceito de derivada está presente, é na de Economia.

Por exemplo, na área da Teoria dos Custos e Decisões da Empresa, este conceito é muito utilizado. Considere-se a função custo (total) $C\ (q)$, onde q é a quantidade do produto (pode ser comprado ou produzido). Esta função está relacionada com os gastos de uma empresa, indústria ou superfície comercial, na produção ou aquisição de algum produto. O custo marginal corresponde ao acréscimo dos custos totais de produção quando se aumenta a quantidade produzida uma unidade. Algebricamente, o custo marginal é calculado como o cociente entre a variação do custo total e a variação na quantidade produzida. O custo marginal pode ainda ser calculado como a derivada da função em ordem à quantidade produzida: C' (q)= $\frac{d(C)}{dq}$.

Pensando agora em termos de receita, pode-se definir a função receita, que está relacionada com a facturação bruta de uma entidade, dependendo do número de vendas de determinado produto. Se p for o preço de venda e q for a quantidade de produto ofertado, então a função receita é definida por $R\ (q)\ =\ p.q$. Da mesma forma, pode pensar-se na função receita marginal, que quantifica aquilo que a empresa ganha com a produção de mais uma unidade desse determinado produto. Essa função pode ser obtida através da derivada da função receita: função receita marginal, $R'\ (q)$.

Se se considerar agora a função lucro, $P\ (q)$, como sendo o lucro efectivo da entidade em questão, ou seja $P\ (q)\ =\ R\ (q)\ -\ C(q)$, também se pode calcular a função lucro marginal, $P'\ (q)$, ou seja, a diferença entre a função receita marginal e a função custo marginal:

$P'\ (q) =\ R'\ (q)\ -\ C'\ (q)$.

CAPÍTULO V

TRABALHO DE CAMPO

Para fazer face ao objectivo da investigação, foram realizadas entrevistas a cinco professores que leccionam/leccionaram o 11º ano de escolaridade Matemática ou Matemática A, conforme se designa actualmente. Os professores foram escolhidos aleatoriamente, sendo apenas requisito fundamental que tivessem largos anos de experiência como professores.

A entrevista é muitas vezes utilizada para providenciar informações sobre motivos, atitudes, valores e crenças (Tilstone, 1998, p. 51).

Nesta situação, o estudo realizado teve como base a observação indirecta, a entrevista. Além de servir para tentar perceber a concepção dos professores acerca do ensino da matemática, também se pretendeu apurar a sua opinião, baseada sempre na sua experiência enquanto professores, acerca da leccionação do tópico do conceito de derivada, no que diz respeito à motivação do tema, aplicações práticas que costumam fazer após ser leccionado conceito, as principais dúvidas dos alunos e por fim, segundo os resultados que foram obtendo ao longo dos anos, em que parte, relacionada com este conceito, é que os alunos costumam cometer mais erros.

A entrevista realizada foi conduzida de forma semi-estruturada, combinando assim perguntas abertas e fechadas. Optou-se por este tipo de entrevista porque possibilita delimitar a quantidade de informações fazendo com que haja um maior foco para o tema.

Com o objectivo de reunir toda a informação e para não haver dispersão em relação ao foco de investigação, foi realizado um guião de entrevista, onde foram descriminados todos os objectivos e uma sugestão para a estrutura das questões a serem realizadas.

Guião da entrevista

Blocos Temáticos	Objectivos	Questões / Tópicos
Legitimação da Entrevista	Legitimar a entrevista	Explicar os propósitos da investigação. Garantir a confidencialidade da entrevista.
Perfil profissional do entrevistado	Conhecer o perfil e a experiência profissional do entrevistado	Há quanto tempo é professor? Em quantos anos leccionou Matemática A do 11º ano?
Ensino da Matemática	Compreender de que forma o professor perspectiva o ensino da matemática.	O que entende ser prioritário no ensino da matemática?
Estratégias e metodologias de ensino	Conhecer as estratégias de ensino-aprendizagem do professor	No ensino da matemática, que metodologias costuma usar diariamente? Que estratégias costuma adoptar para facilitar a compreensão dos alunos?
Conceito de derivada	Conhecer a abordagem utilizada pelo professor na leccionação do conceito de derivada	Que tipo de abordagens já utilizou/utiliza quando leccionou/lecciona o conceito de derivada? Como aplica na prática este conceito? Que tipo de dúvidas costumam surgir? Onde é que os alunos costumam errar mais quando têm de aplicar este conceito?
	Retirar alguma informação que não tenha sido perceptível nas questões anteriores ou que o professor não tenha tido possibilidade de a dizer	Por último, gostaria que fizesse algum comentário ao que foi dito na entrevista.
Considerações finais	Concluir a entrevista	Agradecer ao professor a sua disponibilidade.

Tabela 5.1 – Guião da Entrevista

ANÁLISE DO TRABALHO DE CAMPO

Após a realização das entrevistas foram transcritas as gravações e analisados os dados recolhidos. Relativamente ao Guião de Entrevista anteriormente apresentado, vai ser dado ênfase a cinco das perguntas:

1) O que entende ser prioritário no ensino da matemática?
2) No ensino da matemática, que metodologias costuma usar diariamente?
3) Que tipo de abordagens já utilizou/utiliza quando leccionou/lecciona o conceito de derivada?
4) Que tipo de dúvidas costumam surgir?
5) Onde é que os alunos costumam errar mais quando têm de aplicar este conceito?

A primeira e segunda perguntas têm como objectivo tentar esclarecer de uma forma muito sucinta a perspectiva dos professores entrevistados em relação à disciplina de Matemática assim como conhecer que tipo de estratégias e que metodologias dizem utilizar em contexto de sala de aula. As questões seguintes focam-se mais no tema de investigação propriamente dito. Através das respostas dos professores que transparecem a sua alargada experiência enquanto docentes, vão-se conhecer diferentes estratégias para abordar o conceito de derivada, assim como as principais dúvidas (segundo os professores) que costumam surgir nos alunos e ainda em que tipo de situações é que os alunos costumam errar mais quando têm que aplicar este mesmo conceito.

As ideias principais da resposta de cada um dos professores entrevistados, serão organizadas em pequenas tabelas ou esquemas, para poder facilitar a comparação entre elas. Assim como está apresentado em anexo, os professores entrevistados foram numerados de 1 a 5, sendo utilizada essa identificação em todo o trabalho.

Questão: **O que entende ser prioritário no ensino da matemática?**

Professor 1

"Acho que passa por uma exposição bastante clara dos conceitos teóricos e depois por uma aplicação prática desses mesmos conceitos…".

Professor 2

"Sistematização dos conceitos primeiro e depois a consolidação através da prática."

Professor 3

"(...) se quisermos mesmo definir prioridades, talvez a ligação da matemática à vida, quando possível. Portanto, fazer uma ligação muito grande dos conceitos com a utilidade quando isso é possível."

Professor 4

"E acho que aí a grande batalha é eles criarem esses hábitos, de perceberem que têm que se esforçar mais. A minha grande prioridade em termos de professora de matemática é que eles não detestem a Matemática, cativá-los para a disciplina."

Professor 5

"É prioritário ter bases consolidadas, relativamente aos 3 primeiros ciclos. É prioritário que o aluno tenha interiorizado que é fundamental fazer um trabalho sistemático."

Professor 1	Professor 2	Professor 3	Professor 4	Professor 5
- Explanação teórica dos conceitos e posterior aplicação prática dos mesmos.	- Sistematização dos conceitos.	- Ligação da matemática à vida real; - Desenvolvimento do formalismo, da rotina e dos procedimentos.	- Criar hábitos de trabalho.	- Consolidação das bases (dos anos anteriores); - Trabalho sistemático.

Tabela 5.2 – Síntese das respostas dos professores em relação à primeira questão,

Questão: **No ensino da matemática, que metodologias costuma usar diariamente?**

Professor 1

"...exposição bastante clara dos conceitos teóricos e depois por uma aplicação prática desses mesmos conceitos(...). Às vezes também faço a motivação com um problema prático e depois é que exploro os conceitos."

Professor 2

"Interacção… começar com um problema do dia-a-dia como motivação e depois passar à generalização do problema…"

Professor 3

"Se é um tema em que há dificuldade de fazer ligação à vida, vou pela parte formal, começo pela parte formal, desmonto para depois fazer a prática (rotinas e procedimentos). Se por outro lado, se são conceitos que têm uma ligação muito objectiva e palpável uso o construtivismo, partindo da experiência…"

Professor 4

"Normalmente o que eu gosto de fazer é dar uma ficha de motivação ou dar um problema de motivação que eles se interroguem e comecem a pensar no assunto e apresento questões que se vão colocando ou numa ficha orientada, depende."

Professor 5

"(…) utilizo o método expositivo, como é óbvio, o método do trabalho de grupo, em termos de novas tecnologias utilizamos a calculadora gráfica(…)"

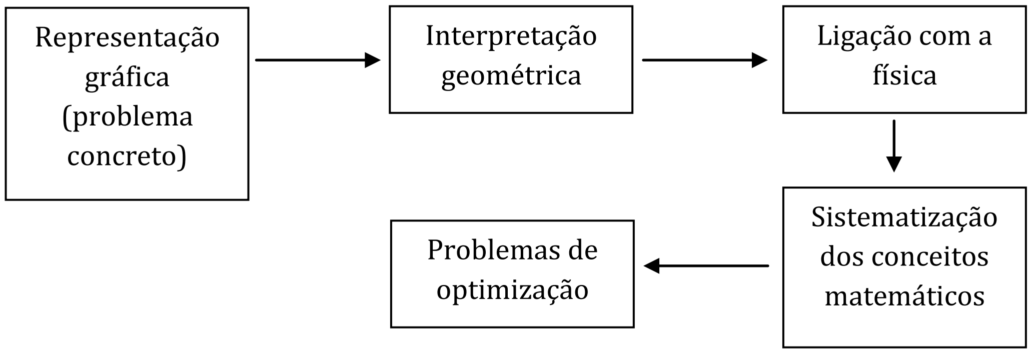
Professor 1	Professor 2	Professor 3	Professor 4	Professor 5
- Explanação teórica dos conceitos seguida da sua aplicação prática. Quando o tema permite, inicia com a exploração de uma situação-problema.	- Iniciar a aula com um problema do dia-a-dia que permita fazer a generalização dos conceitos pretendidos. De seguida passar para consolidação dos conceitos.	- Havendo dificuldade em ligar o tema à vida real, vai pela "parte formal", seguida da resolução de problemas.	- Inicia com uma ficha de investigação que faça tirar conclusões acerca dos conceitos pretendidos. De seguida, consolida com uma ficha de trabalho.	- Por norma utiliza o método expositivo. Em algumas situações inicia o tema com uma situação-problema.

Tabela 5.3 – Síntese das respostas dos professores em relação à segunda questão,

Questão: **Que tipo de abordagens já utilizou/utiliza quando leccionou/lecciona o conceito de derivada?**

Professor 1

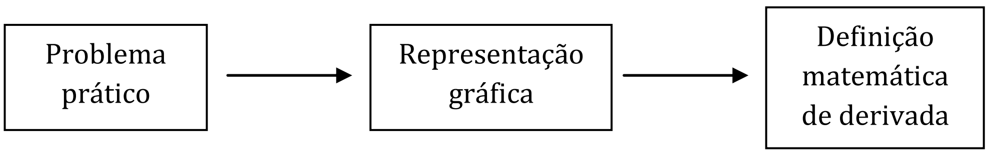
"Normalmente costumo ir por uma representação gráfica que corresponda a um caso concreto, um problema do quotidiano e daí tento estabelecer uma relação apertada entre a representação gráfica que se fez, a interpretação geométrica, a física e para depois chegar à matemática no final disso tudo. Vou fazendo um paralelo, graficamente é assim, física entra aqui… velocidades médias e instantâneas é por aí que se estabelece a taxa média de variação."



Esquema 5.4 – Sequência didáctica do conceito de derivada do professor 1.

Professor 2

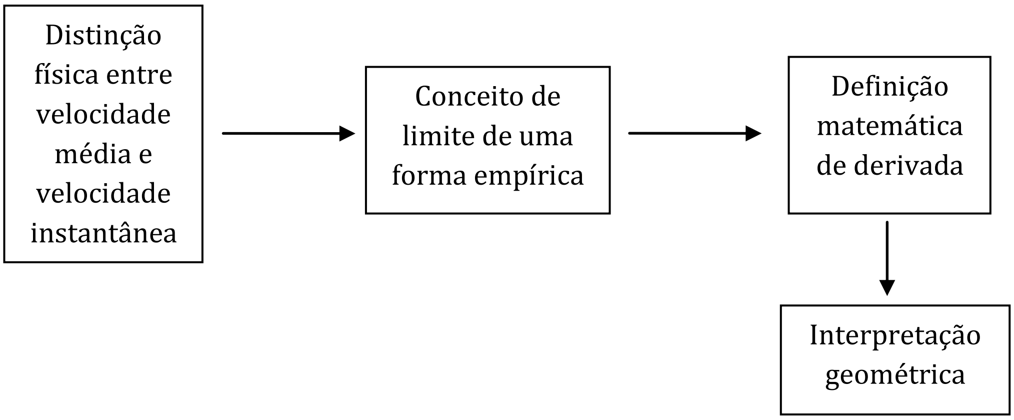
"Como os alunos estão na idade de tirar a carta, eu aproveito os sinais de subida acentuada e descida acentuada. (…) Depois ponho o pontozinho, falo da recta tangente. Vou buscar o Kit, o carro do justiceiro, estão a ver o carro? Aqui está a subir, aqui a descer. Depois falo derivadas infinitas, dá o salto p'ra cima, derivada que tende p'ra mais infinito, quando dá o salto p'ra baixo temos a derivada tende para menos infinito. Tento brincar com isso, com uma coisa que seja minimamente palpável."



Esquema 5.5 – Sequência didáctica do conceito de derivada do professor 2.

Professor 3

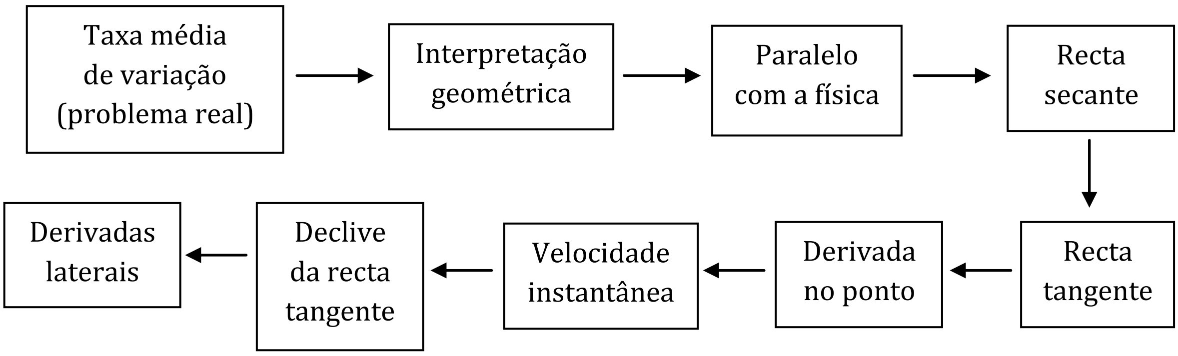
"…Porque se parte do clássico exemplo da diferença entre a velocidade média e da velocidade instantânea num percurso qualquer, numa relação entre espaço e tempo e parte daí para depois fechar o intervalo, estamos a falar do conceito de limite mas que é dado de uma forma empírica."



Esquema 5.6 – Sequência didáctica do conceito de derivada do professor 3.

Professor 4

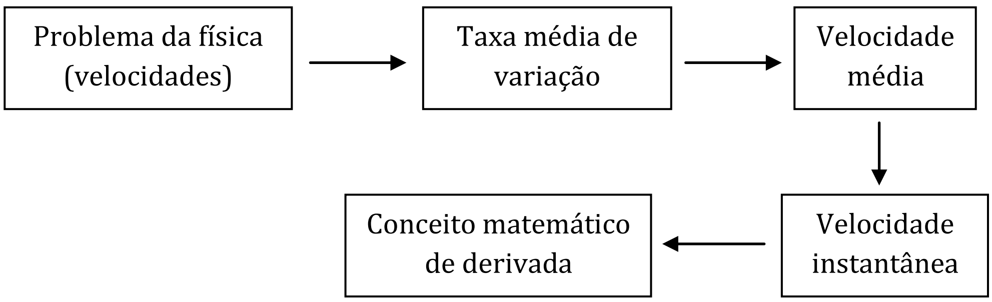
"Primeiro, começo por falar de taxa média de variação. Através de um problema real, tentar responder a várias perguntas sobre isso. Depois concretizando melhor, falamos em taxa média de variação, ver o que significa geometricamente, se for uma função que relacione a distância com o tempo, ver o que significa na física. Depois passando da secante à tangente, ver o que se passa naquele ponto, derivada no ponto pela definição, velocidade instantânea, declive da tangente. Depois mais tarde as derivadas laterais e a derivada de uma função."



Esquema 5.7– Sequência didáctica do conceito de derivada do professor 4.

Professor 5

“Normalmente começo pelos conceitos Físicos que estão por trás do conceito de derivada, se quisermos, mais correctamente, pelo conceito de velocidade e de aceleração, com situações práticas e só a partir daí começo por definir a seguir a taxa média de variação que está interligada com conceito de velocidade média depois passo para o conceito de velocidade instantânea e só depois introduzo a seguir o conceito de derivada.”



Esquema 5.8 – Sequência didáctica do conceito de derivada do professor 5.

Questão: **Que tipo de dúvidas costumam surgir?** (A pergunta foi mais direccionada para tentar perceber qual seria a parte em que os alunos teriam mais dificuldade).

Professor 1

“Mas sobretudo, eu acho que a dificuldade é a interpretar aquilo que os problemas dizem.”

Professor 2

“É o conceito de tender para o mesmo número, x para x zero. O conceito de infinitésimo.”

Professor 3

“…quando vamos dar a definição com a fórmula dos h, temos ali um artifício, porque dizemos que o h é zero mas o h tende para zero… e há ali um buraco em termos formais é um substrato que desapareceu.”

Professor 4

“A derivada no ponto.”

Professor 5

"A maior dúvida que eles têm tem a ver exactamente com a compreensão matemática do conceito de derivada (…)"

Professor 1	Professor 2	Professor 3	Professor 4	Professor 5
- Interpretação nos problemas de optimização.	- O conceito de infinitésimo.	- Quando na prática dizemos que "qualquer coisa tende para zero" e os alunos substituem por zero.	- Derivada no ponto.	- Compreensão matemática do conceito de derivada (por haver falta de compreensão relativamente ao conceito de limite).

Tabela 5.9 – Síntese das respostas dos professores em relação à quarta questão,

Questão: **Onde é que os alunos costumam errar mais quando têm de aplicar este conceito?**

Professor 1

"Quando têm que fazer uma composição, quando têm que se exprimir, dizem-se e desdizem-se… andam p'ra frente e p'ra trás."

Professor 2

"Em problemas concretos é onde têm mais dificuldades, é na interpretação do problema."

Professor 3

"…talvez nas questões técnicas relacionadas com as derivadas laterais, a questão formal não está para apoiar."

Professor 4

"A derivada no ponto."

Professor 5

"Muitas vezes eles têm muita dificuldade em compreender aquilo que se pede e conseguir ler nas «entrelinhas» (...)"

Professor 1	Professor 2	Professor 3	Professor 4	Professor 5
- Quando têm que se exprimir (por exemplo, a fazer uma composição a partir de um problema de optimização).	- Na interpretação dos problemas concretos.	- Quando são confrontados com perguntas que envolvam derivadas laterais; - Problemas de optimização.	- Derivada no ponto.	- Na interpretação de problemas concretos; - Em questões de carácter demonstrativo.

Tabela 5.10 – Síntese das respostas dos professores em relação à quinta questão,

Conclusões

Apesar de haver pontos em comum nas respostas dos professores entrevistados, as suas respostas também se distinguem em diversas ocasiões. Por exemplo, logo na primeira questão "**O que entende ser prioritário no ensino da matemática?",** o professor 3 distingue-se dos restantes. Enquanto os outros quatro professores, dão mais importância à sistematização dos conceitos e à criação dos hábitos de trabalho, este professor acha que é mais importante ligar a matemática à vida real e desenvolver nos alunos o formalismo matemático. Contudo, a par com os outros professores, o professor 3 também acha importante desenvolver nos alunos rotina e procedimentos que se devem seguir no estudo da matemática. Fazendo um enquadramento com as quatro orientações que Thompson indicou acerca das concepções pedagógicas, diria que o professor 3, centra-se no conteúdo dando mais importância à compreensão conceptual:

" Depois em termos do que podemos definir na matemática em termos de prioridades e de competências, a parte formal, o formalismo, criar um hábito nos alunos de formalizarem."

O professor 1, a par com todos os outros professores, centram-se no conteúdo dando mais ênfase na execução, mas de todos os entrevistados, foi aquele que mais mostrou centrar-se nos alunos:

"(...) mas estou atenta a eles e chamá-los a atenção e reforçar com mais uma aplicação daquilo que eles parece que estão a demonstrar ter dificuldade de acompanhar. Disponibilizo-me sempre para ajudar, para me procurarem na escola, principalmente aqueles alunos que têm problemas em manifestarem-se em sala de aula (…) Se me pedem mais trabalho eu dou-lhes mais trabalho. Às vezes peço-lhes para fazerem trabalho em casa e trazerem numa folha anexa e eu corrijo em casa e faço comentários. Vai dependendo."

Quando questionados acerca da **metodologia que costumam usar diariamente**, os professores 1 e 5 têm preferência pelo método expositivo. Primeiro abordam os conceitos teóricos para depois os aplicarem na prática. Os outros professores preferem começar com um problema que faça chegar os alunos aos conceitos pretendidos. Os professores 2 e 4 ainda afirmam fazer sempre a consolidação dos conceitos. Entrando mais concretamente no tema de investigação, na pergunta: "**Que tipo de abordagens já utilizou/utiliza quando leccionou/lecciona o conceito de derivada?**", os professores foram unânimes nas suas respostas, todos eles iniciam essa unidade temática com uma situação-problema, das mais diversas áreas. Todos eles fazem ligação com a física, relacionando a velocidade média e a velocidade instantânea com a taxa média de variação de uma função e a taxa instantânea de variação (derivada no ponto). A forma como sequenciam a unidade, é diferente entre todos eles. A maior diferença encontra-se na parte da sequência em que chegam à definição matemática de derivada de uma função. Enquanto que uns chegam a essa definição no final da sequência, outros apresentam-na no meio, fazendo só depois as devidas interpretações geométricas. Na questão que diz respeito às dúvidas dos alunos, dois dos professores (1 e 5) afirmam que as dificuldades estão mais relacionadas com a interpretação. Os alunos têm dificuldades em interpretar os problemas (em particular os de optimização) e têm dificuldades em interpretar o conceito de derivada propriamente dito. Os outros três professores afirmam que a dificuldade dos alunos está relacionada com a noção de limite que eles ainda não têm de uma forma minimamente consistente. O facto de só a trabalharem de uma forma muito intuitiva, faz com que tenham dificuldades em aspectos como a derivada no ponto e as derivadas laterais. As respostas da última questão em análise, "**Onde é que os alunos costumam errar mais quando têm de aplicar este conceito?**", vão um pouco de encontro com as respostas da questão anterior. Quatro dos professores afirmam que é nas questões que envolvem a interpretação dos alunos, nomeadamente nos problemas de optimização. No entanto, dois professores referem mais uma vez, que o tipo de perguntas onde os alunos erram mais, são aquelas que envolvem os conceitos de derivada lateral e derivada no ponto. Um dos professores ainda afirma que os alunos também têm mais dificuldades nas questões de carácter demonstrativo.

CAPÍTULO VI

SEQUÊNCIA DIDÁCTICA

O que se pretende com este capítulo, é a criação de uma Sequência Didáctica pronta a ser utilizada a nível do 11º ano de Matemática A. Após a análise das entrevistas, foi criada uma sequência didáctica, de acordo com essa mesma análise e o meu juízo pessoal. Assim sendo, a sequência é a seguinte:

- Taxa média de variação e taxa de variação;
- Taxa de variação instantânea;
- Derivada de uma função num ponto;
- Interpretação física e geométrica da taxa média de variação e da taxa instantânea de variação (derivada de uma função num ponto);
- Derivada de uma função;
- Relação entre o sentido da variação de uma função e a variação do sinal da função derivada.

Esta Unidade de Ensino tem os seguintes objectivos:

- Calcular velocidades médias dada uma relação espaço-tempo;
- Calcular a taxa média de variação (t.m.v.) de uma função num intervalo dado;
- Reconhecer que a t.m.v. traduz a rapidez de variação de uma função;
- Reconhecer que a t.m.v. de uma função no intervalo [a, b] é igual ao declive da recta secante ao gráfico da função nos pontos de abcissas a e b;
- Reconhecer que o cálculo da t.m.v. num intervalo cuja amplitude tende para zero conduz à determinação da taxa de variação num dado instante;
- Conhecer o significado geométrico da derivada de uma função num ponto;
- Determinar a função derivada de algumas funções;
- Aplicar a derivada de uma função num ponto na determinação de extremos de uma função.

Para iniciar todos os itens descritos, vão ser elaboradas pequenas fichas de investigação de forma a conseguir atingir os conceitos pretendidos.

Ficha de investigação 1

Um jogador de ténis dá, com a raquete, uma forte pancada numa bola, elevando-a no ar. A altura *d* da bola (em metros) em função do tempo t (em segundos) é descrita pela equação:

$$d(t) = 25t - 5t^2$$

1) Calcula o valor da **velocidade média** a que a bola se desloca no intervalo [1, 2].

(Nota: Na Física, a velocidade média corresponde à variação da posição $\overrightarrow{\Delta x}$ de um corpo em relação ao intervalo de tempo Δt gasto no percurso. Assim, ***a velocidade média no intervalo de tempo*** Δt *é representada por:* $\vec{v}_{média} = \overrightarrow{\Delta x} / \Delta t$*. O módulo da velocidade média é designado por* ***rapidez média.*** *Ou seja,* ***a velocidade média é dada pelo quociente entre a variação da distância percorrida e a amplitude do intervalo de tempo em que se verifica)***

2) Determina a expressão da velocidade média da bola para um intervalo genérico [*a*, *b*].

Definição: A taxa média da variação de uma função f no intervalo $[a,b]$ é dada por:

$$t.m.v_{[a,b]} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

NOTA: Este quociente exprime a rapidez com que a função cresce ou decresce no intervalo de tempo dado.

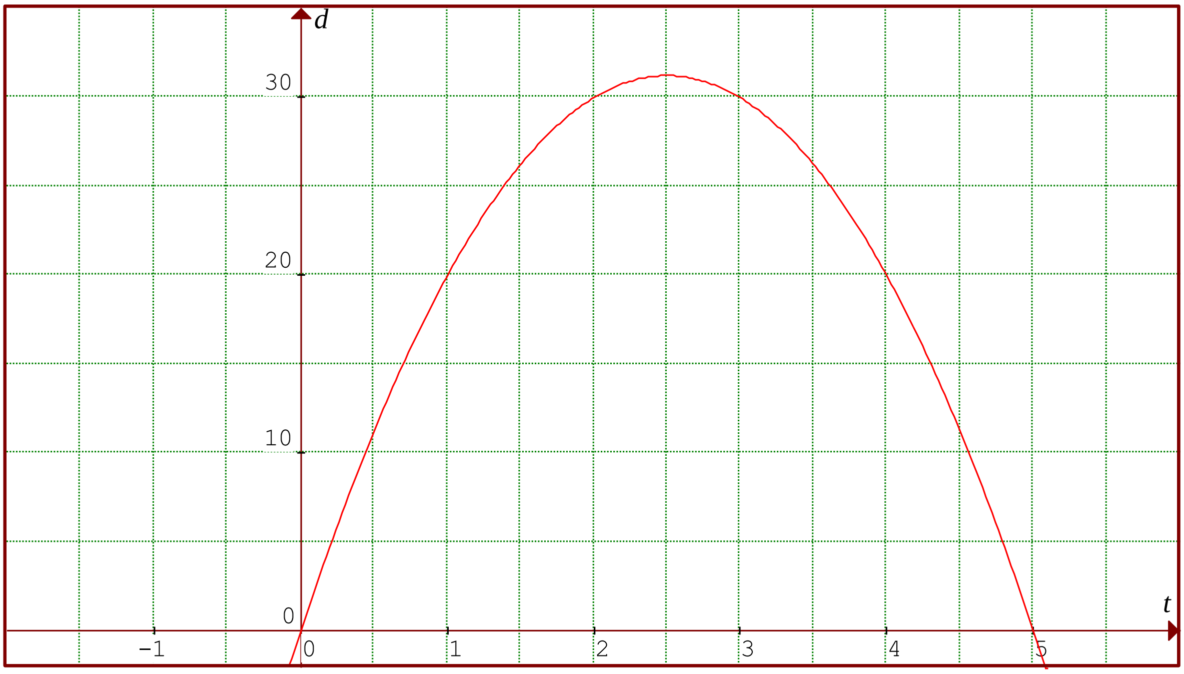
2.1) Compara a expressão da taxa média de variação com a da velocidade média da bola para um intervalo genérico [*a*, *b*]. Que podes concluir?

As expressões são idênticas.

2.2) Com base nos resultados obtidos, a que corresponderá fisicamente a taxa média de variação?

Fisicamente, a taxa média de variação corresponde à velocidade média.

3) Observa a representação gráfica da função $t \to d(t)$, no seguinte intervalo:



Sejam ***A*** o ponto de abcissa 1, ***B*** *o* ponto de abcissa 2, ***C*** o ponto de abcissa 3 e ***D*** o ponto de abcissa 4 do gráfico da função *d(t).*

3.1) Traça as rectas *AB*, *AC* e *AD* no gráfico anterior, utilizando cores diferentes, e completa a seguinte tabela:

Recta	Declive da recta
AB	10
AC	5
AD	0

Recorda *que o declive de uma recta* ***s*** *cujo vector director seja* $\vec{s}\left(s_1, s_2\right)$ *é dado por,* $m_s = \dfrac{s_2}{s_1}$, *ou ainda, que o declive de uma recta que passa pelos pontos* $A\left(x_A, y_A\right)$ *e* $B\left(x_B, y_B\right)$ *é dado por* $m_{AB} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

3.2) Atendendo à expressão da taxa média de variação, calcula-a nos intervalos:

a) $t.m.v._{[1;2]} =$ ______ b) $t.m.v._{[1;3]} =$ ______ c) $t.m.v._{[1;4]} =$ ______

3.3) Compara os valores obtidos para as taxas médias de variação com os declives das rectas *AB*, *AC* e *AD*. O que observas?

São iguais.

3.4) Com base nos resultados obtidos, a que corresponderá **geometricamente** a taxa média de variação?

Corresponde ao declive da recta secante ao gráfico que contém os pontos de abcissa 1, 2, 3 e 4.

Conclusões:

- A taxa média de variação no intervalo $[a, b]$ corresponde à velocidade média nesse intervalo quando a função nos fornece a distância percorrida em função do tempo (significado *Físico* da TMV);
- A taxa média de variação nos intervalos estudados coincide com o declive da recta secante ao gráfico que contém os pontos de abcissa iguais aos extremos dos respectivos intervalos considerados. Assim, podemos concluir que a taxa média de variação de uma função no intervalo [a,b] é igual ao declive da recta secante ao gráfico da função que passa pelos pontos de abcissas a e b (*significado geométrico* da TMV);

4) Calcula o valor da velocidade média nos seguintes intervalos de tempo:
[1; 2], [1; 1,5], [1; 1,1], [1; 1,01], [1; 1,001] e completa a tabela seguinte:

Intervalo $[a, b]$ (em s)	Valor da velocidade média em $[a, b]$ (em m/s)
[1; 2]	5
[1; 1,5]	12.5
[1; 1,1]	14.5
[1; 1,01]	14.95
[1; 1,001]	14.995

4.1) À velocidade da bola num instante de tempo chama-se **velocidade instantânea**. Qual parece ser o valor da <u>velocidade instantânea</u> **1***s* após a bola ter sido lançada? Justifica.

15. À medida que a amplitude do intervalo diminui o valor da velocidade média aproxima-se mais de 15.

4.2) Sendo h um número real não nulo, determina, em função de h, a velocidade média da bola no intervalo $[1; 1+h]$.

$$v_{m_{[1;1+h]}} = \frac{d(1+h) - d(1)}{h}$$

4.3) Conjectura o que deve acontecer a h para obtermos a resposta dada em 4.1.

h deve tender para zero.

5) A partir das alíneas anteriores escreve a equação reduzida da recta **t** tangente ao gráfico da função no ponto de abcissa 1.

$$y = 15x + 5$$

Definição: Seja $f(x)$ uma função definida no intervalo $]a, b[$ e seja x_0 um ponto desse intervalo. Chama-se derivada da função f no ponto x_0 e representa-se por $f'(x_0)$, ao limite, quando existe:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$

Notação: $f'(x_0)$ pode representar-se também por: $(\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}})_{\mathrm{x}=\mathrm{x}_0}$ ou $\mathrm{Df}_{\mathrm{x}} = \mathrm{x}_0$.

6) Constrói o gráfico da velocidade em função do tempo.

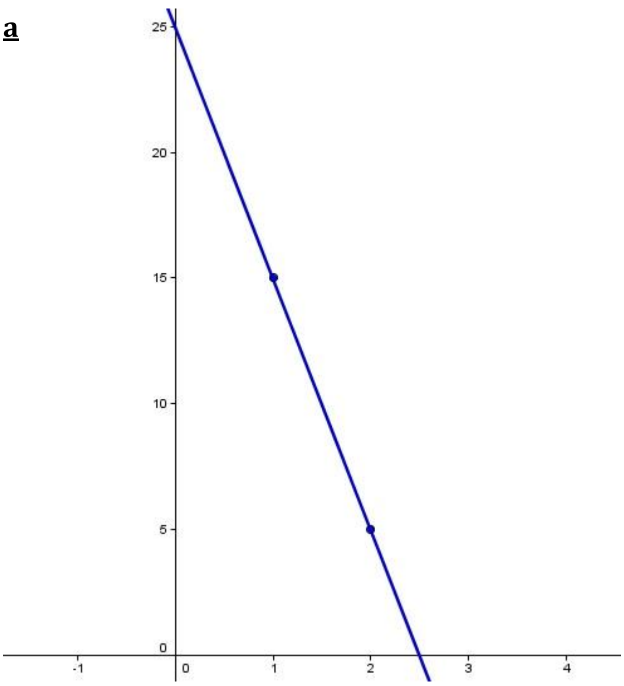
Da alínea 4.1 tem-se que $lim_{h\to 0} \frac{d(1+h)-d(1)}{h} = 15$, *ou seja, para esta nova função, a ordenada correspondente à abcissa 1 é o 15. Tem-se o ponto de coordenadas (1,15).*

Calcular a ordenada para pelo menos mais um instante t.

$$\lim_{h\to 0} \frac{d(2+h)-d(2)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{[25(2+h)-5(2+h)^2]-[25(2)-5(2^2)]}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-5h^2+5h}{h} = 5$$

Segundo ponto da nova função: (2,5). Posteriormente os alunos calculariam as coordenadas dos restantes pontos usados em 4.1 para poderem perceber de que tipo de curva se trata.

a



A função que tem como representação gráfica esta recta, é a função derivada de d.

Definição: Seja f(x) uma função definida no intervalo]a,b[e seja]c,d[$\subset$]a,b[o intervalo dos números reais em que f admite derivada finita.

A função

$$\begin{array}{ccc}]c\,,\,d[& \longrightarrow & IR \\ x & \longmapsto & f'(x) \end{array}$$

chama-se derivada da função f.

Notação: $f'(x)$ pode representar-se também por: $\frac{\partial f(x)}{\partial x}$ ou Df(x).

<u>Nota:</u>

- Toda a **função constante** $\boldsymbol{f(x) = k}$**,** definida em IR, tem derivada finita em IR e a sua <u>função derivada</u> é $\boldsymbol{f'(x) = 0}$**.**

- A **função identidade** $\boldsymbol{f(x) = x}$**,** definida em IR, tem derivada finita em IR e a sua <u>função derivada</u> é $\boldsymbol{f'(x) = 1}$**.**

- A **função afim** $\boldsymbol{f(x) = mx + b}$**,** com *m* $\in$ *IR\{0} e b* $\in$ *IR,* admite derivada finita em IR e a sua **<u>função derivada</u>** é $\boldsymbol{f'(x) = m}$**.**

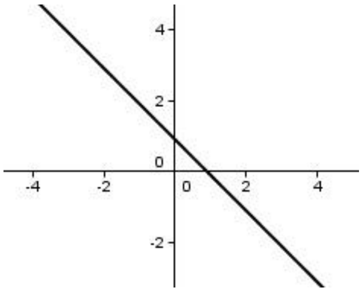
- Uma função do tipo $\boldsymbol{f(x) = ax^n}$, com $a \neq 0$ admite derivada finita em IR e a sua **<u>função derivada</u>** é $\boldsymbol{f'(x) = nax^{n-1}}$**.**

- A **função racional** $\boldsymbol{f(x) = \frac{a}{x-b}}$**,** com $x \in IR\backslash\{b\}$ e com $a \neq 0$ admite derivada finita em IR\{b} e a sua **<u>função derivada</u>** é $\boldsymbol{f'(x) = -\frac{a}{(x-b)^2}}$**.**

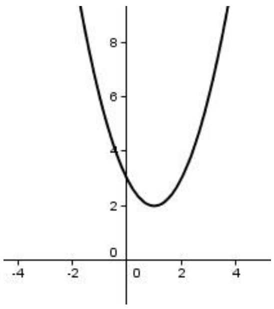
7) Considera as seguintes representações gráficas de algumas funções. Na coluna do lado esquerdo, estão as funções $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ e $j(x)$. Do lado direito estão representadas as suas funções derivadas. Faz corresponder a $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ e $j(x)$,

uma das letras A, B, C e D, de forma a ligares com cada uma das funções a sua função derivada.

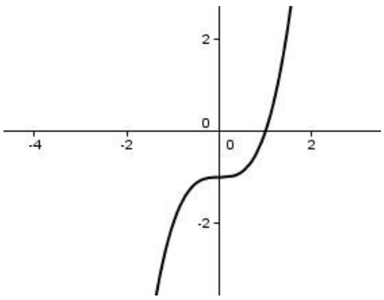
$f(x)$



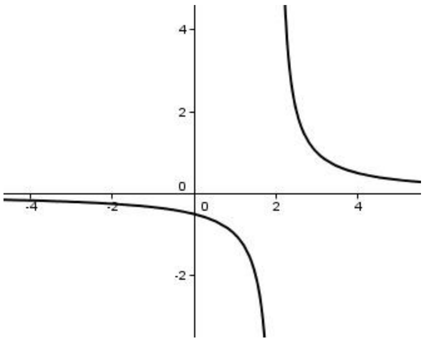
$g(x)$



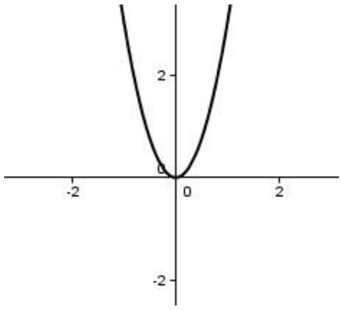
$h(x)$



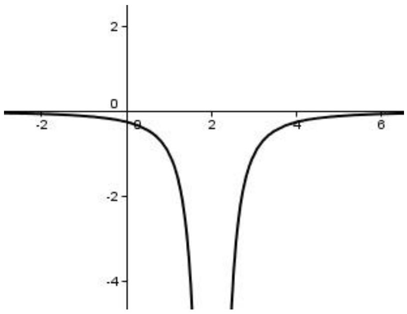
$j(x)$



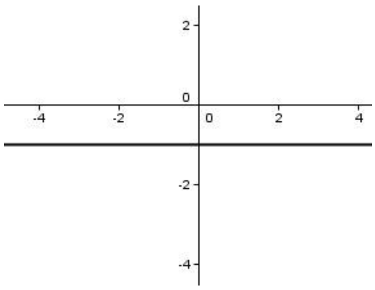
A



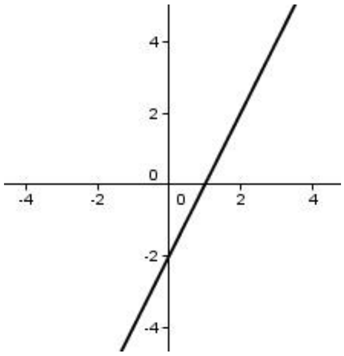
B



C



D



Ficha de investigação 2

1) Considera a função $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 1$.

a) Determina a expressão analítica da função derivada de g (g').

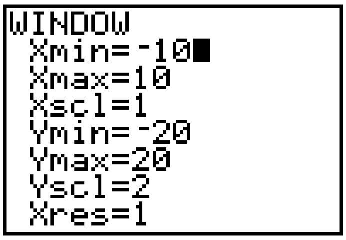
b) Determina os valores de *x* para os quais a função derivada se anula.

c) Na máquina de calcular gráfica representa as funções g e g', e completa o seguinte quadro:

x	$-\infty$				$+\infty$
Sinal de g'					
Variação de g					

Observações:

- Para visualizar as duas funções considera a seguinte janela de visualização:



- Coloca na 1ª linha os zeros da função derivada.

d) A partir do quadro preenchido na alínea anterior descobre se existe alguma relação entre o sinal da função *g'* e o sentido de variação da função *g* ?

e) A partir da alínea **d)** completa as seguintes afirmações que relacionam o **sinal da função derivada *f'* com o sentido de variação da função *f***, com *f* uma função genérica:

"Sendo *f* uma função de domínio $D \subset \Re$ e I um intervalo tal que $I \subset D$,

- Se a **função derivada *f'* é positiva** em todos os pontos do intervalo I, então a função *f* ______________________________ nesse intervalo;
- Se a **função derivada *f'* é negativa** em todos os pontos do intervalo I, então a função *f* _________________________ nesse intervalo;
- Se a **função derivada *f'* é nula** em todos os pontos desse intervalo I então a função *f* ______________________________ nesse intervalo."

f) Tendo em conta o quadro preenchido na alínea **d)** verifica se existe alguma <u>relação entre a variação do sinal da função g' numa vizinhança dos seus zeros e os extremos de g</u>.

g) A partir da alínea anterior completa as seguintes afirmações que relacionam a **variação do sinal da função derivada *f'* numa vizinhança dos seus zeros e os extremos da função *f***, com *f* uma função genérica:

"Seja *f* uma função com derivada finita num intervalo $I \subset \Re$, e **c** um ponto de I distinto dos extremos do intervalo. Então:

- ***f(c)* é um máximo relativo de *f*** se:
  → ____ e o sinal da função derivada passa ___________ numa vizinhança do ponto de abcissa **c**.

- ***f(c)* é um mínimo relativo de *f*** se:
  → ____ e o sinal da função derivada passa ___________ numa vizinhança do ponto de abcissa **c**.

CAPÍTULO VII

CONCLUSÃO/CRÍTICA

De todos os aspectos abordados ao longo do presente trabalho, é de salientar a importância deste conceito no currículo do Ensino Secundário. Além de ter aplicação nas mais variadas áreas e de promover a interdisciplinaridade, tem uma forte ligação com os problemas do quotidiano, o que faz com que os alunos observem de uma forma concreta a ligação que a Matemática tem com a vida real.

Relativamente ao Trabalho de Campo, seria interessante comparar as abordagens dos professores entrevistados, com as abordagens de alguns professores recém-formados. Se se pensar na questão de uma forma mais profunda, todos os professores entrevistados começaram por leccionar o conceito de derivada quando se introduzia o conceito de limite anteriormente. A maioria afirma que os alunos têm especial dificuldade nas questões da derivada no ponto e nas derivadas laterais. Os professores recém-formados, não passaram por essa reforma e penso que poderiam trazer abordagens inovadoras e que podiam enriquecer bastante este trabalho.

Por outro lado, como para mim este foi um ano de aprendizagens, achei que tinha todo o interesse e fazia todo o sentido desenvolver uma Sequência Didáctica a partir das sugestões dos professores entrevistados.

Para estudos posteriores, seria interessante aplicar esta Unidade de Ensino a algumas turmas do 11º ano de Matemática A, para tentar concluir se de facto o alunos têm mais dificuldades nas questões apontadas pelos professores. É certo que esta Sequência Didáctica tem um carácter introdutório do conceito, mas poderia ser desenvolvido material de avaliação tendo em vista este objectivo concreto.

No que diz respeito às limitações encontradas, tenho noção que para fazer uma análise mais profunda teria que fazer um estudo mais continuado e prolongado. Além das entrevistas, esse estudo devia fazer-se acompanhar com observações das aulas dos professores entrevistados. Esse aspecto seria bastante importante para poder fazer um enquadramento teórico mais fiel à luz dos aspectos que se tentaram realçar e apurar.

A nível pessoal estou muito satisfeita com o tema que escolhi e sinto que fiquei mais enriquecida e com vontade de dar continuidade às minhas aprendizagens.

BIBLIOGRAFIA

Aires, A. P., & Vázquez, M. S. *O conceito de derivada no ensino secundário ao longo do século XX.*

Bello, A., & Caldeira, H. (2000). *Ritmos e Mudanças - Física 11º Ano.* Porto: Porto Editora.

Brito, C., Martins, A. C., & St. Aubyn, M. C. (2009). *Mat 11 Parte 2 - Matemática A.* Lisboa: Lisboa Editora.

Chaplin, J. (1981). *Dicionário de Psicologia.* Lisboa: Publicações Dom Quixote.

Lafon, R. (1963). *Vocabulaire de Psychopédagogie.* Paris: Presses Universitaires de France.

Neves, M. A., Guerreiro, L., & Moura, A. (2007). *Funções II - Matemática A 11º ano.* Lisboa: Porto Editora.

Ponte, J. P. *Concepções dos Professores de Matemática e Processos de Formação.* Lisboa: Universidade de Lisboa.

Prosser, M., & Trigwell, K. (2000). *Understanding Learning and Teaching - The Experience in Higher Education.* Buckingham: Open University Press.

Samuelson, P. A., & Nordhaus, W. D. (1993). *Economia.* Lisboa: McGraw-Hill.

Silva, E., Pastorinho, A., Lopes, L., Silvestre, M., & Moinhos, R. (2001/2002). *Programa de Economia A.* Lisboa: Ministério da Educação.

Silva, J. C., Fonseca, M. G., Martins, A. A., Fonseca, C. M., & Lopes, I. M. (2002). *Programa de Matemática do Ensino Secundário.* Lisboa: Ministério da Educação.

Tilstone, C. (1998). Observing Teaching and Learning - Principles and Practice. London: David Fulton.

WEBGRAFIA

http://cwx.prenhall.com/bookbind/pubbooks/thomas_br/chapter1/medialib/custom3/topics/derivatives.htm, 9 de Maio 2011

http://www.matematiques.com.br/conteudo.php?id=31, 9 de Maio 2011

http://www.estv.ipv.pt/PaginasPessoais/fmartins/Aluno/Matem%C3%A1tica/Ensino%20Superior/Derivadas/Derivadas.htm, 9 de Maio 2011

http://www.icmc.usp.br/~pztaboas/nocte/node13.html, 9 de Maio 2011

http://www.somatematica.com.br/historia/derivadas.php, 9 de Maio 2011

ANEXOS

Entrevistas

<u>Professor 1</u>

Há quantos anos é professora?

Este é o 32º ano. Tive que estar a contar, senão já não sabia!

E quantos anos leccionou Matemática A?

Matemática A pressupõe-se que é desde a reforma de 2004? Matemática A é desde 2004 que está em vigor essa designação. O programa não sofreu grandes alterações, mas essa designação é desde 2004. Se é ao longo dos 32 anos já perdi a conta. Desde 2004 foram 3/4 anos. Para trás não tenho noção, daqui sei porque estive a fazer o historial e sei mais ou menos quantos anos foram.

E tem noção antes disso?

Nem pouco mais ou menos. Foram sempre sequências rotativas. Normalmente levamos as turmas desde o 10º. Aconteceu-me uma vez levar uma turma desde o 7º até ao 12º. Mas acho que foi só uma vez que isso aconteceu e claro uma turma que se foi diluindo e perdendo.

No ensino da matemática o que é que entende ser prioritário?

Acho que passa por uma exposição bastante clara dos conceitos teóricos e depois por uma aplicação prática desses mesmos conceitos para que os alunos possam perceber onde é que aquilo pode ser aplicado. Se possível envolve-los também um bocadinho mas isso já passa pela metodologia…

No ensino da matemática que metodologias costuma usar diariamente?

Diariamente passa por aquela tentativa de manter a ordem na sala de aula, de os tentar envolver naquilo que se está a fazer, respeitando a velocidade de cada um que nem sempre é tarefa muito fácil e estabelecer com eles um relacionamento aceitável para não se criarem muitas asperezas.

E a nível de metodologias de ensino? Já me explicou há pouco que passa por uma explanação dos conceitos teóricos e depois para a aplicação desses conceitos…

Às vezes também faço a motivação com um problema prático e depois é que exploro os conceitos. Vai dependendo de cada caso e da disponibilidade que há, não temos sempre a mesma disponibilidade ao longo do ano, quer física quer mental. Se possível faço motivação, eu gosto.

E quando repara que há alunos que não adquirem tão bem os conceitos, que estratégias costuma adoptar?

Normalmente as turmas são grandes para se fazerem grupos de nível, mas estou atenta a eles e chamá-los a atenção e reforçar com mais uma aplicação daquilo que eles parece que estão a demonstrar ter dificuldade de acompanhar. Disponibilizo-me sempre para ajudar, para me procurarem na escola, principalmente aqueles alunos que têm problemas em manifestarem-se em sala de aula, às vezes os alunos são mauzinhos… e eles remetem-se ao silêncio. Se me pedem mais trabalho eu dou-lhes mais trabalho. Às vezes peço-lhes para fazerem trabalho em casa e trazerem numa folha anexa e eu corrijo em casa e faço comentários. Vai dependendo.

Falando do meu tema propriamente dito, que tipo de abordagens já fez quando leccionou o conceito de derivada?

Normalmente costumo ir por uma representação gráfica que corresponda a um caso concreto, um problema do quotidiano e daí tento estabelecer uma relação apertada entre a representação gráfica que se fez, a interpretação geométrica, a física e para depois chegar à matemática no final disso tudo. Vou fazendo um paralelo, graficamente é assim, física entra aqui… velocidades médias e instantâneas é por aí que se estabelece a taxa média de variação.

Na prática também já referiu que aplica esse conceito buscando a parte da física e depois trabalha problemas mais directos?...

Numa primeira parte a experiência diz-me que convém bater ali um bocadinho e acimentar um bocadinho na aplicação ainda que abstracta e depois vêm os problemas de optimização que trazem toda a aplicação dos conceitos na prática… que é dos capítulos que mais se podem relacionar com o quotidiano.

Apercebe-se que os alunos costumam ter dúvidas onde?

Eu acho que enquanto estão acompanhados e estão na aula, não têm dificuldades, tudo correu muito bem, toda gente acompanha (há sempre um caso ou outro que tem falta de bases). Mas sobretudo, eu acho que a dificuldade é a interpretar aquilo que os problemas dizem. Se é só calcula, faz, tira, faz-se, mas se é um problema de optimização que envolve tudo isso eles às vezes não sabem por que ponta lhe hão-de pegar.

Então não é propriamente dificuldade na aquisição destes conceito?...

Quem tem dificuldade nos conceitos anteriores, vem ao de cima nas duas situações, mas sobretudo vem com a interpretação. Neste tipo de problemas passa-se sempre pelos mesmos focos, quase que se pode fazer uma "receita culinária" para a sua resolução. Mas de qualquer das maneiras eles sabem que têm de fazer isso mas não sabem onde é que têm de ir buscar cada elemento ao enunciado. E eles não interpretam bem.

Também se depara com essas dificuldades quando eles são testados?

Sim, claro. Quando têm que fazer uma composição, quando têm que se exprimir, dizem-se e desdizem-se… andam p'ra frente e p'ra trás. Depois querem dizer tanto e não dizem nada.

Este tópico das funções passa pelos 3 anos. Acha que este é um dos tópicos abordados mais atractivos?

Sim, o mal das funções é esse. O capítulo das funções é transversal. Mas eu acho que sim, que é um dos capítulos onde se podem fazer coisas mais bonitas, é um dos tópicos mais atractivos. Há uns anos fiz avaliação de desempenho e as minhas aulas assistidas foram deste tópico. Se eu tivesse de escolher, não sei que outro tópico escolheria. Os alunos percebem bem e aplicam razoavelmente.

Professor 2

Há quantos anos é professor?

Há 32.

Em quantos anos Matemática A ao 11º ano?

Só uma vez. Anteriormente leccionei durante muitos anos. Aqui acontece aquele regime de pegar numa turma desde o 10º e levá-la até ao 12º. Quando estive em Porto de Mós e Alcobaça, onde estive, quase todos os anos tive 11º e 12º ano.

A nível do ensino da matemática o que entende ser prioritário, quando está a leccionar?

A sistematização dos conceitos. Coisa que não existe muito, as didácticas não lhe dão muita importância. Sistematização dos conceitos primeiro e depois a consolidação através da prática. P'ra mim, são os dois vectores fundamentais.

A nível de ensino e de estratégias que costuma usar diariamente, em que é que se foca mais?

Nos audiovisuais… não como início, mas como resumo.

Estratégias falo também como interacção com os alunos…

Interacção… começar com um problema do dia-a-dia como motivação e depois passar à generalização do problema… e depois rever os conceitos base que necessito para atingir os meus objectivos e para desenvolver as suas competências. Generalização e depois consolidação.

Quando se depara com alunos com mais dificuldades na compreensão dos conceitos, como costuma reforçar…

Isso explicando individualmente (pedagogia individualizada) … durante a aula, correndo o risco de haver um bocado de barulho, mas aí não abdico quando há um aluno que tenha interesse em perceber. O que acontece a maior parte das vezes é que os alunos não perceberam e nem têm interesse em perceber. Mas quando existe um aluno que não percebeu e está interessado em perceber, deixo tudo para me focar nesse aluno.

O meu tema de investigação foca-se no conceito de derivada. Que tipo de abordagem utiliza quando lecciona o conceito de derivada?

Como os alunos estão na idade de tirar a carta, eu aproveito os sinais de subida acentuada e descida acentuada. Como para tirarem o código têm de estudar aquilo, eu aproveito. Eles sabem muito bem o que é 10% de inclinação, que é 10 na vertical a dividir por 100 na horizontal e é aí que eu vou buscar o conceito de derivada. Depois falo-lhes também nos carrinhos a subir e nos carrinhos a descer e é assim que eu dou a derivada. É um conceito muito prático e visual. Depois falo-lhes naquele sítio aqui em Aveiro nas pontes que tem esse sinal a subir e a descer, e a partir daí digo-lhes que a derivada é o diferencial da vertical sobre o diferencial da horizontal e a partir daí eles começam a perceber o conceito e passo para a generalização.

Depois também intercala com a interpretação geométrica…

Sim, claro. Depois ponho o pontozinho, falo da recta tangente. Vou buscar o Kit, o carro do justiceiro, estão a ver o carro? Aqui está a subir, aqui a descer. Depois falo derivadas infinitas, dá o salto p'ra cima, derivada que tende p'ra mais infinito, quando dá o salto p'ra baixo temos a derivada tende para menos infinito. Tento brincar com isso, com uma coisa que seja minimamente palpável.

Quando lecciona este conceito, quais são as maiores dúvidas que surgem aos alunos?

É o conceito de tender para o mesmo número, x para x zero. O conceito de infinitésimo.

Aqui já introduz o conceito de limite formalmente?

Eu já dou. O que mais lhes custa a perceber é aquele conceito de infinitésimo, o tender para lá mas nunca lá chegar. A abstracção e a continuidade, é onde têm mais dificuldade.

Na prática, nos testes, os alunos costumam falhar onde?

Em problemas concretos é onde têm mais dificuldades, é na interpretação do problema. Depois de interpretar e sabendo os conceitos, é fácil lá chegarem.

O que acha sobre este tema?

É pena na sociedade não se aplicar, é pena os engenheiros não aplicarem os conceitos, o conceito de derivada em problemas que surgem no dia-a-dia.

<u>Professor 3</u>

Há quantos anos é professor?

30 anos.

Desde a reforma de 2004, quantas vezes leccionou o 11º ano A?

3 vezes.

E anteriormente?

Bastantes vezes.

Sempre leccionou nesta escola?

7 ou 8 anos no país, depois estive 2 anos no CIFOP, dentro dos 30 anos digamos que durante uns 20 leccionei o 11º.

Dentro do ensino da matemática, o que é que entende ser prioritário quando está a leccionar?

Olhe, entendo enfim… se quisermos mesmo definir prioridades, talvez a ligação da matemática à vida, quando possível. Portanto, fazer uma ligação muito grande dos conceitos com a utilidade quando isso é possível. Depois em termos do que podemos definir na matemática em termos de prioridades e de competências, a parte formal, o formalismo, criar um hábito nos alunos de formalizarem, rotinar nos procedimentos e na técnica e depois aquelas coisas que são dos livros não é? Resolução de problemas… Em termos de prioridades acho que é a ligação da matemática à vida. Evidentemente tudo isto com o objectivo de desenvolver organização, método, cálculo mental…

Quando está leccionar, sente que há um leque de metodologias que usa diariamente?

Vario consoante o tema. Se é um tema em que há dificuldade de fazer ligação à vida, vou pela parte formal, começo pela parte formal, desmonto para depois fazer a prática (rotinas e procedimentos). Se por outro lado, se são conceitos que têm uma ligação muito objectiva e palpável uso o construtivismo, partindo da experiência, por exemplo na questão da modelação de funções, a partir dos dados criar os modelos e depois ir para a parte formal. Dependendo, vario, dentro do que hoje em dia são as tecnologias disponíveis.

Então é adepto das tecnologias?

Sim, são mais um auxiliar. Não acho que devemos ser dependentes delas mas são uma mais valia. Por exemplo, este ano estou a dar MACs e uso muitas vezes a internet.

E quando na sala de aula se depara com alunos que têm mais dificuldades de compreensão, costuma usar que tipo de estratégias?

Aí eu faço uma separação: no 3º ciclo trabalhamos para formar alunos com um perfil, com uma escolaridade obrigatória, e portanto as chamadas estratégias de recuperação e maximização de sucesso são levadas ao extremo, por isso posso trabalhar com grupos de nível, alunos com dificuldades de trabalho, posso deixar o resto da turma a trabalhar e pegar nesses alunos e trabalhar com eles individualmente. Enquanto no secundário, as coisas não são tão fáceis, enfim… porque há naturalmente uma promoção da selecção em prioridade máxima, prejudicando evidentemente a maximização do sucesso, e não privilegiamos tanto esse tipo de estratégias de recuperação. E por isso, há um programa que tem de se cumprir, nós somos balizados por exames nacionais que interferem, de uma forma mais ou menos significativa na nota de frequência e por isso aí temos já algum compromisso que nos inibe mais nesse tipo de práticas mais individuais. Eu assumo que não faço no secundário esse tipo de estratégias como faço no 3º ciclo.

Relativamente ao conceito de derivada, que tipo de abordagens já utilizou quando o leccionou?

Conceito de derivada tem uma mudança radical nos últimos anos, antigamente nós antes de darmos a derivada dávamos a definição de Heine e de Cauchy de limite que não se dá. Portanto, há uma mudança radical da abordagem do conceito de derivada, e tem a ver com o que eu disse, hoje em dia dá-se o conceito de derivada de uma forma construtiva. Porque se parte do clássico exemplo da diferença entre a velocidade média e da velocidade instantânea num percurso qualquer, numa relação entre espaço e tempo e parte daí para depois fechar o intervalo, estamos a falar do conceito de limite mas que é dado de uma forma empírica.

Então quando fala das assimptotas no início do segundo período não dá essa noção de limite…

Eu introduzo como ele é permitido, é um conceito gráfico e não um conceito formal, porque a definição de Heine e Cauchy não é dada formalmente, desapareceu dos programas do secundário. O conceito gráfico de assimptota é uma simples observação e um comportamento uma relação de objectos e imagens. A abordagem do conceito de derivada está diferente.

Depois desse tal problema do dia a dia, costuma intercalar com a interpretação geométrica?

Sempre, faço uma ligação fortíssima à interpretação e depois procuro na resolução, usar o maior formalismo possível.

Quando este conceito surge pela primeira vez aos alunos, que dúvidas costumam surgir habitualmente?

A nível prático, como alguém entendeu que toda aquela parte de rotinas e procedimentos ligada ao cálculo de limites desapareceu, o levantar indeterminações…. Isso era dado antes do conceito de derivada, quando vamos dar a definição com a fórmula dos h, temos ali um artifício, porque dizemos que o h é zero mas o h tende para zero… e há ali um buraco em termos formais é um substrato que desapareceu. Nós como professores de matemática que ensinámos de outra forma durante vários anos ali sentimos um bocadinho… parece que estamos quase a "enganar" os alunos. Porque se o h aparecer no denominador vai haver uma indeterminação… há aqui uma parte que parece que passa a ser assim um bocadinho artificiosa… há uma falha formal. Quem pensou nestes programas, pensou com certeza de uma forma amadurecida… e eu confio.

Em situação de teste, em que tipo de tarefas é que eles costumam falhar?

É uma pergunta complicada de responder… não sei, talvez nas questões técnicas relacionadas com as derivadas laterais, a questão formal não está para apoiar. Em funções por ramos antigamente era explorada até à exaustão… e quando se dá a função por módulos. Em termos de derivadas, possivelmente na questão de problemas que tenham a necessidade do uso da derivada lateral, depois nos problemas de optimização, sempre e ao fim ao cabo não tem a ver com a noção de derivada, mas os alunos têm dificuldades em obter a função do modelo e depois há sempre aquela batota do professor meter a função modelo. Nos problemas de optimização é nitidamente onde eles têm mais dificuldades, e nas derivadas laterais.

Por fim gostaria que fizesse uma apreciação a este tema.

Relativamente às funções, gosto dessa distribuição do programa, deixar o 2º período de todos os 3 anos para as funções, eu gosto. A mim a única coisa que me surpreende foi esta passagem de um programa que se apoiava nas questões formais, para um programa que deixou de se apoiar nas questões formais. Toda aquela parte de simbologia e de lógica que era dada de uma forma concentrada agora vai sendo dada… acredito que os alunos cheguem à universidade com um défice grande formal e de rotinas e de técnica. A questão da formalização, quando se usam os equivalentes, quando não se usam, fazer uma definição com principio meio e fim, nesse aspecto eu acho que o programa está deficitário, deve ter havido um divórcio entre os professores do superior e do secundário. Este programa deve ter sido feito sem o acordo dos professores da universidade. Há aqui uma reforma em que os professores universitários não foram ouvidos.

<u>Professor 4</u>

Há quantos anos lecciona?

Ora bem, comecei no ano lectivo 80/81,portanto há 31.

E tem noção dos anos em que leccionou Matemática A?

Foi sempre. Na altura nem sequer havia diferença. E desde que há diferença nunca leccionei nenhuma das outras. Leccionei sempre Matemática A. Dei Matemática sem ser ao 10º, 11º e 12º, mas nunca dei Matemática B nem as MACS.

E ao 11º ano?

Ai não sei…

Se não tiver noção, desde 2004 quantas vezes deu?

Só não devo ter dado três anos.

O que é que entende ser prioritário quando está a leccionar Matemática?

Depende um bocadinho dos níveis que se estão a dar. Se se está a referir ao secundário, eu acho que no secundário há uma grande passagem. O 10º é a passagem de um nível em que eles facilmente atingem o 3 e o 4 e passam para um nível de exigência muito superior. No 10º ano acho essencial que eles adquiram hábitos de trabalho. Normalmente não trazem muito de trás porque é tudo muito simples, nas aulas temos tempo para tirar as dúvidas maiores, fazer as fichas todas etc… Quando chegamos ao 10º eles têm de trabalhar um bocadinho mais por conta deles e vão ter que se empenhar mais. E acho que aí a grande batalha é eles criarem esses hábitos, de perceberem que têm que se esforçar mais. A minha grande prioridade em termos de professora de matemática é que eles não detestem a Matemática, cativá-los para a disciplina. Claro que faço mais isso no 7º, 8º e 9º do que no 10º,11º e 12º porque aí já é uma escolha deles e além disso também não tenho tempo para estar com grandes floreados e portanto tento sempre cativá-los ligando a Matemática o mais possível a outras ciências, à vida real, o que nem sempre é fácil. Em termos de conteúdos, eu acho que tudo é importante, embora as funções eu acho que é a parte mais importante do programa. A geometria é importante no 10º ano. A estatística é assim menos aprofundada.

A nível de metodologia, que estratégias costuma adoptar nas suas aulas?

Normalmente o que eu gosto de fazer é dar uma ficha de motivação ou dar um problema de motivação que eles se interroguem e comecem a pensar no assunto e apresento questões que se vão colocando ou numa ficha orientada, depende. Eles cheguem às conclusões que eu quero que eles tirem. Nem sempre é possível ser feito, não é? Mas é a maneira como eu gosto mais de dar as coisas. Uma ficha de investigação que os faça pensar e que os leve a concluir aquilo que é p'ra concluir. Depois a seguir é a aplicação dos conhecimentos numa ficha de trabalho. Isto é o que eu acho que é mais rentável, mas como muitas vezes não há tempo, acabamos por dar os conceitos algumas vezes sem investigação nenhuma.

Sente que adopta estratégias específicas para facilitar a compreensão dos alunos? Sente que muda as suas estratégias para chegar aos alunos que têm mais dificuldades?

Quando eu começo a perceber que há alunos com dificuldades, tento abordar as coisas de outra forma. Dando um exemplo concreto, às vezes começamos com um grande floreado e vemos que aquilo não está a dar nada. Começamos com uma ficha de investigação muito pomposa em que queremos que eles tirem umas lindas conclusões e eles não chegam lá. Temos de saber dar a volta à questão. Ainda outro dia, numa aula, estive a dar as equações irracionais e estive a dizer os passos… 1º não sei quê, 2º… e um aluno diz-me "ai eu gosto tanto dessas receitas professora". Há miúdos que se interessam por aquilo que está por trás, há outros que só querem aplicar e ter boa nota no teste.

Quando aplica o conceito de derivada, que tipo de estratégias já adoptou?

Primeiro, começo por falar de taxa média de variação. Através de um problema real, tentar responder a várias perguntas sobre isso. Depois concretizando melhor, falamos em taxa média de variação, ver o que significa geometricamente, se for uma função que relacione a distância com o tempo, ver o que significa na física. Depois passando da secante à tangente, ver o que se passa naquele ponto, derivada no ponto pela definição, velocidade instantânea, declive da tangente. Depois mais tarde as derivadas laterais e a derivada de uma função.

Quando lecciona este conceito, os alunos costumam ter mais dificuldade onde?

A derivada no ponto. Eles não percebem bem aquela noção da curva ser recta naquele ponto. Eles depois acabam por aplicar, mas eu acho que eles não têm a noção. Explicar-lhes que não existe derivada num certo ponto. Tem a ver com muitas noções geométricas e a geometria neste caso, eles não entendem muito bem o que é que isto tem a ver com a tangente. Mais tarde eles acabam por perceber melhor.

E nas aplicações práticas?

Eu acho que eles aí aderem bem. Nos problemas de optimização, eles acabam por perceber bem a relação entre o sinal da derivada e a monotonia da função e acabam por, com os exercícios práticos e muito ligados à vida real, acabam por entender que realmente aquele valor é o valor máximo… e vêem. Depois no gráfico da função vêem que aquilo corresponde à realidade. Aí eu acho que eles aderem bem.

Tem algum comentário a fazer acerca deste tema da derivada?

Eu acho que é do que tem aplicações mais interessantes. Mas também acho que é dos mais difíceis de introduzir o conceito de derivada no ponto. Mas acho que é daqueles que tem actividades mais giras. Acho que é dos mais interessantes embora não seja dos mais fáceis de dar. E depois aqueles casos particulares em que não há derivada num ponto, eles não percebem. Eles não têm maturidade para os pequenos pormenorezinhos.

<u>Professor 5</u>

Há quantos anos é professor?

Há 30 anos.

Durante quantos anos leccionou Matemática A?

Durante 29 anos.

E ao 11º ano?

Leccionei vários anos. Talvez 2/5 desse período.

A nível da sua perspectiva acerca do ensino da Matemática, o que é que entende ser prioritário?

É prioritário ter bases consolidadas, relativamente aos 3 primeiros ciclos. É prioritário que o aluno tenha interiorizado que é fundamental fazer um trabalho sistemático. É prioritário ter um bom domínio da língua materna, o português neste caso, penso que é a disciplina que talvez tenha mais a ver com a matemática porque as maiores dificuldades que os alunos apresentam, por exemplo em termos de exames nacionais, prendem-se com questões que fazem um apelo muito grande à capacidade de interpretação. Ora, a capacidade de interpretação só será suficientemente eficaz se o aluno tiver um bom domínio da língua materna, penso que são os vectores mais importantes.

A nível de metodologias, que metodologias que costuma usar diariamente?

Eu talvez vá um pouco ao arrepio daquilo que são as correntes dominantes neste momento, pelo menos em alguns sectores, do ensino da matemática, utilizo o método expositivo, como é óbvio, o método do trabalho de grupo, em termos de novas tecnologias utilizamos a calculadora gráfica, embora eu entenda que a calculadora gráfica tem que ser utilizada com alguma parcimónia, portanto são objectos extremamente importantes mas penso que têm de ser utilizados com contra peso e medida. Porque o uso abusivo da calculadora gráfica e outras tecnologias, penso que cria alguma letargia e há conceitos que eu considero fundamentais que acabam por cair por terra porque eu também defendo que a memorização continua a ter um papel importante em algumas áreas da matemática. Não vou estar a mentir. Outras metodologias… esporadicamente o power point, o retroprojector.

Especificando um bocadinho mais a nível de metodologias, o professor costuma explorar um determinado tópico como?

Depende dos temas. Há temas em que efectivamente a metodologia tem como primeiro passo os conceitos fundamentais que estão subjacentes àquela teoria ou aquele tema em que está em discussão, há outros temas, aqueles que se prestam a tal em que nós começamos com uma situação problema e a partir daí desenrola-se a aula.

Quando há alunos que têm dificuldades, que tipo de estratégias o professor costuma usar nessas situações?

Uma das estratégias pode ser recordar os conceitos básicos que estão subjacentes àquele assunto. Muitas vezes os alunos não podem ir de A para B porque os alunos não dominam os conceitos fundamentais de A, portanto não podem perceber B. Outra estratégia pode ser, por exemplo, utilizar exercícios ou questões de um nível mais básico que possam propiciar a que o aluno tenha um entendimento mais correcto daquilo que se está a leccionar de momento.

Quando lecciona este tópico, costuma começar como?

Normalmente começo pelos conceitos Físicos que estão por trás do conceito de derivada, se quisermos, mais correctamente, pelo conceito de velocidade e de aceleração, com situações práticas e só a partir daí começo por definir a seguir a taxa média de variação que está interligada com conceito de velocidade média depois passo para o conceito de velocidade instantânea e só depois introduzo a seguir o conceito de derivada.

Quando lecciona este conceito, que tipo de dúvidas costumam surgir aos alunos?

A maior dúvida que eles têm tem a ver exactamente com a compreensão matemática do conceito de derivada, porque a ênfase que se dá hoje ao conceito de limite que antecede directamente o conceito de derivada, penso que não é tão aprofundada como deveria ser.

Então o professor defende que o conceito de limite deveria ser dado no 11º ano antes da derivada…

Exactamente, e mais consolidado.

Nos problemas de optimização sente que os alunos entendem o que lhes é pedido?

A maior dificuldade que eles têm nos problemas de optimização tem a ver com aquilo que genericamente podemos chamar "selecção da informação". Muitas vezes eles têm muita dificuldade em compreender aquilo que se pede e conseguir ler nas "entrelinhas", penso que é um dos maiores problemas que eles têm nos exames nacionais.

Segundo a sua experiência, em situação de teste, os alunos costumam falhar mais onde?

Falham fundamentalmente ao nível da interpretação e falham muito em questões que têm um carácter demonstrativo.

Por fim, queria que o professor fizesse algum comentário ao meu tema, comparando com os outros temas a nível do secundário.

O tema da derivada é um tema muito interessante, muito abrangente, em que nós podemos fazer muitas extrapolações para outros ramos do conhecimento. Penso que é talvez dos temas em que isso é mais visível. Nós através do tema "derivadas" podemos caminhar para outros ramos do saber: economia, sociologia, estudo das populações, biologia, astronomia… é um tema que dá "pano p'ra mangas".